

**dr hab. inż. Andrzej Senderski**

Katedra Automatyki Napędu i Urządzeń Przemysłowych

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Al. Mickiewicza 30

### Rozwiązywanie równań różniczkowych – instrukcja

1. W swoim katalogu założyć podkatalog "CWICZ1"
2. Do "CWICZ1" skopiować z dostarczonej dyskietki pliki: **DefFigureBlack.m**
3. Zapoznać się z funkcjami realizowanymi przez ten plik
4. Uruchomić **DefFigureBlack.m**
5. Utworzyć funkcyjny M-plik rozwiązujący równanie różniczkowe:

$$y^{(4)} + a_3y^{(3)} + a_2y^{(2)} + a_1y^{(1)} + ay^{w_0} = u \quad (1)$$

W tym celu:

- zapoznać się z funkcją **ode23.m**, - przekształcić równanie (1) w układ równań 1-go rzędu przez podstawienie:

$$x(1) = y \quad (2)$$

Z (1) i (2) wynika układ czterech równań pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} x(1)' &= x(2) && \text{(odpowiada } y^{(1)}) \\ x(2)' &= x(3) && \text{(odpowiada } y^{(2)}) \\ x(3)' &= x(4) && \text{(odpowiada } y^{(3)}) \\ x(4)' &= u - a_3x(4) - a_2x(3) - a_1x(2) - a_0x(1)^{w_0} && \text{(odpowiada } y^{(4)}) \end{aligned} \quad (3a)$$

gdzie:

$$x = [x(1) \ x(2) \ x(3) \ x(4)], \quad (3b)$$

$$a_3=a_3, \ a_2=a_2, \ a_1=a_1, \ a_0=a_0, \quad (3c)$$

$$u = \text{const}, \quad (3d)$$

- utworzyć funkcyjny M-plik **rown1.m** wyliczający wektor pochodnych xprim w funkcji zmiennych t,x - /xprim=rown1(t,x)/:

$$\begin{aligned} xprim(1) &= x(2) \\ xprim(2) &= x(3) \\ xprim(3) &= x(4) \\ xprim(4) &= u - a_3x(4) - a_2x(3) - a_1x(2) - a_0x(1)^{w_0} \end{aligned} \quad (4)$$

parametry  $a_0 \div a_3$ ,  $w_0$  oraz wartość wymuszenia  $u$  przesłać do pliku "rown1.m" poprzez deklarację **global**

- utworzyć funkcyjny M-plik **metoda.m**:

deklarujący:

- wartości parametrów:  $a_3=4$ ,  $a_2=6$ ,  $a_1=1.5$ ,  $a_0=1$ ,  $w_0=1$ ,
- wartość wymuszenia  $u=1$ ,
- wartości początkowe wektora  $x = x_0 = 0$ ,
- czas początkowy obliczeń  $t_0 = 0$ ,
- czas końcowy obliczeń  $t_k = 100$  [s],
- czas początkowy danych wyjściowych dla wykresu  $t_{ow} = t_0$ ,
- czas końcowy danych wyjściowych dla wykresu  $t_{kw} = t_k$ ,

wyliczający:

- przebieg czasowy / wektory  $t, x$ /,
- maksimum  $/t_{xmax}, x_{max}/$  wektora  $x$ ,
- czas regulacji  $t_{reg}$  /czas po którym przebieg czasowy  $x(1)$  nie różni się od wartości ustalonej  $/x(1)=1/$  więcej niż o 5%,
- wartości maksimumów lokalnych wektora  $x$  /dla przebiegu oscylacyjnego/,

- wykreślający:

- przebieg czasowy  $x(1)$  z zaznaczeniem liniami przerywanym wartości:
  - $t_{xmax}, x_{max}$ ,  $t_{reg}$  oraz  $0.95u$  i  $1.05u$ ,
- trajektorię fazową:  $x' = f(x)$  tzn.  $x(2) = f(x(1))$ ,

W przypadku wystąpienia błędów posłużyć się instrukcjami **debugera**:  
**/dbstop, dbtype, dbcont, dbstep, dbclear** itd/

6. Utworzyć funkcyjny M-plik wyznaczający portret fazowy dla zadeklarowanego zbioru warunków początkowych  $x_{o12} = \{x_0(1), x_0(2)\}$  przy założeniu zerowych wartości pozostałych składowych wektora warunków początkowych  $x_0$ .

W tym celu należy utworzyć funkcyjny M-plik **portret.m**:

- deklarujący:

- wartości parametrów:  $a_3=4$ ,  $a_2=6$ ,  $a_1=1.5$ ,  $a_0=1$ ,  $w_0=1$ ,
- wartość wymuszenia:  $u=1$ ,
- zbiór warunków początkowych:
 
$$x_{o12} = \{(x_0(1), x_0(2))\} = [(0, 0); (0.5, 0); (0, 0.2); (0.5, 0.2)]$$
- czas początkowy obliczeń  $t_0 = 0$ ,
- czas końcowy obliczeń  $t_k = 100$  [s],
- czas początkowy danych wyjściowych dla wykresu  $t_{ow} = t_0$ ,
- czas końcowy danych wyjściowych dla wykresu  $t_{kw} = t_k$ ,
- odwołujący się do funkcyjnego M-pliku **metoda2.m** wyznaczającego funkcję:

$[t, x] = \text{metoda2}(x_0, a, w_0, u, t_0, t_k)$ ,

gdzie:  $a$  - wektor parametrów  $a_0 \div a_3$ ,

/plik **metoda2.m** utworzyć przez modyfikację pliku **metoda.m**/,

– wykreślający:

- przebiegi czasowe  $x(t)$  na jednym rysunku /figure(1)/ dla kolejnych warunków początkowych z przyporządkowaniem cyklicznym kolorów poszczególnym przebiegom /przebieg 1 - kolor 'y', przebieg 2 - kolor 'm', przebieg 3 - kolor 'c', przebieg 4 - kolor 'r', przebieg 5 - kolor 'g', przebieg 6 - kolor 'b'/,

- portret fazowy  $x' = f(x)$  w kolorach takich samych jak odpowiednie przebiegi czasowe  $x$ ,

Sprawić, aby w trakcie realizacji **portret.m** występowały przerwy /instrukcja **pause**/ po każdorazowym wykreśleniu kolejnego przebiegu. Plik **portret.m** tak sformułować, że zmiana zbioru warunków początkowych  $x_0$  /zarówno wartości jak i rozmiaru/ nie wpływa na potrzebę modyfikacji tego pliku.

7. Utworzyć funkcyjny M-plik **metoda1.m** rozwiązujący równanie różniczkowe (1) przy zadeklarowanej liczbie punktów  $n \times m$  /np.  $n \times m = 50$ / przebiegu czasowego wektora  $x$ .

W tym celu podzielić przedział  $[t_0, t_k]$  na ciąg  $n \times m$  podprzedziałów i przy wykorzystaniu "ode23" wyznaczać końcowe wartości wektora  $x$  dla kolejnych podprzedziałów i następnie przypisywać je jako warunek początkowy dla następnego podprzedziału. Dla ułatwienia można skorzystać z modyfikacji plików **metoda.m** i **rown1.m**.

W trakcie realizacji obliczeń wyświetlać numer aktualnie wyznaczanego punktu. Sporządzić wykres czasowy  $x(t)$ .

8. Zrealizować zadanie jak w punkcie 9, ale z wykorzystaniem funkcji **linspace** do zdefiniowania wektora  $tspan$  w wywołaniu funkcji **ode** (Patrz help)

**Opis instrukcji ODE23 (skrót)**

Zmiennokrokowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych (Runde-Kutty 2-3 rzędu).

Podstawowy format instrukcji:

$$[T, Y] = \text{ODE23}(F, Tspan, Y0)$$

gdzie:

- T – wektor chwil czasu,
- Y = [ Y(1) Y(2) ... Y(n)] - macierz rozwiązań, Y(i) – wektor wartości i-tej pochodnej rozwiązania równania (całki szczególnej) ,
- F - nazwa funkcyjnego m-pliku wyliczającego wartości pochodnych ( wartości wyznaczone przez prawą stronę równania różniczkowego) dla danych wartości wejściowych czasu t i zmiennej x /x' = f(t,x)/,
- Tspan = [T0, Tfinal]  
lub Tspan jest zadany wektorem chwil czasu tworzącym rozwiązanie o liczbie większej niż 2
- T0, Tfinal – początkowy i końcowy czas obliczeń (przedział obliczeń).

Jeśli wymiar Tspan jest równy 2, to ode swobodnie wyznacza punkty wektora T.

Natomiast, jeśli wymiar Tspan jest większy od 2, to ode wyznacza punkty wektora T w tych samych chwilach co wektor Tspan.



